

УДК 330.45

*Катаев А.В., кандидат экономических наук,  
доцент кафедры Менеджмента и инновационных технологий  
Института управления в экономических, экологических и социальных  
системах Южного федерального университета  
Россия, г. Таганрог*

**ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ КОЛИЧЕСТВА УЧАСТНИКОВ  
ПРОЕКТА КАК ЗАДАЧА ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО  
ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

*Статья посвящена исследованию задачи оптимизации количества партнеров, участвующих в реализации проекта. Приведена математическая постановка задачи в виде задачи целочисленного линейного программирования. Даны различные формулировки дополнительных условий задачи и рекомендации по нахождению оптимального решения.*

*Ключевые слова:* управление проектом, оптимизации количества исполнителей, задача оптимизации, линейное программирование.

*Kataev A.V.,  
assistant Professor of Management and innovative technologies  
Institute of Management in Economic, Ecological and Social Systems  
Southern Federal University,  
Russia, Taganrog*

**PROBLEM OPTIMIZATION NUMBER PARTICIPANTS OF THE  
PROJECT AS PROBLEM OF INTEGER LINEAR PROGRAMMING**

*Article is devoted to research of a problem of optimization of number of the partners participating in implementation of the project. The mathematical problem definition in the form of a problem of integer linear programming is given. Various formulations of additional statements of the problem and recommendations about finding of the optimal solution are made.*

**Keywords:** *management of the project, optimization of number of performers, problem of optimization, linear programming.*

Рассмотрим следующую задачу оптимизации количества участников проекта. Имеется  $m$  работ (задач) в проекте. На выполнение каждой работы претендуют  $n$  различных исполнителей (партнеров), готовых в полном объеме выполнить определенные работы за согласованную с каждым партнером стоимость  $c_{i,j}$ . На каждую работу требуется выбрать только по одному партнеру, но при этом исполнитель может быть назначен на несколько работ одновременно. Требуется найти такое распределение всех задач по партнерам, чтобы задействовать минимальное количество партнеров и уложиться в выделенный бюджет  $S$ .

Из задачи следует, что целевой функцией является количество задействованных в проекте исполнителей. В качестве ограничений выступает выделенный на выполнение работ бюджет и условие выполнения одной работы одним партнером. Оптимальное же решение задачи представляет собой удовлетворяющий всем ограничениям план назначения партнеров по задачам, при котором значение целевой функции будет минимально.

Очевидно, что без ограничения на бюджет оптимальным решением является выполнение всех работ только одним (любым) исполнителем. Следовательно, лучшим значением целевой функции является 1 (нижняя граница), когда задействован только один исполнитель на всех работах, а

худшим –  $n$  (верхняя граница), если потребовалось привлечь всех партнеров для выполнения работ с выделенным общим объемом финансирования.

Задача может не иметь решения в том случае, если не существует удовлетворяющего ограничению по бюджету варианта расстановки исполнителей по работам. Условие наличия допустимого решения следующее:

$$\sum_{j=1}^m \min_i c_{i,j} \leq S, \quad (1)$$

где:

- $i$  – порядковый номер исполнителя,  $i = \overline{1, n}$ ;
- $j$  – порядковый номер работы,  $j = \overline{1, m}$ ;
- $m$  – количество работ, а  $n$  – количество исполнителей;
- $S$  – бюджет;
- $c_{i,j}$  – стоимость выполнения  $j$ -ой работы  $i$ -ым исполнителем.

Условие (1) отражает то, что в том случае, если сумма минимальных по стоимости вариантов выполнения работ будет меньше либо равна бюджету, тогда существует хотя бы один допустимый план распределения задач по партнерам.

**Математическая постановка задачи** в виде модели целочисленного нелинейного программирования (2) предложена нами в [1]:

$$L = L(x) = \sum_{i=1}^n \max_j x_{i,j} \rightarrow \min \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{i,j} x_{i,j} \leq S & (2.2) \\ \sum_{i=1}^n x_{i,j} = 1, \quad j = \overline{1, m} & (2.3) \\ x_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m} & (2.4) \end{cases} \quad (2)$$

где:

-  $x_{i,j}$  – искомые неизвестные, показывающие факт назначения  $i$ -го исполнителя на  $j$ -ю работу (1 – назначается, 0 – нет).

-  $L$  – количество задействованных партнеров, а  $L(x)$  – функция определяющая  $L$  через  $x_{i,j}$ .

Заметим, что при решении частного случая рассматриваемой задачи, когда  $c_{i,j}$  интерпретируется как возможность выполнения  $j$ -ой работы  $i$ -ым исполнителем (0 – может выполнить, 1 – не может), условие (2.2) можно заменить на (3).

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{i,j} x_{i,j} = 0. \quad (3)$$

В модели (2) целевая функция (2.1) нелинейная, что не позволяет найти оптимальное решение точными методами линейного программирования, включая симплекс-метод.

Задача может быть решена методом полного перебора вариантов и выбора из них оптимального. Однако, насчитывается  $n^m$  комбинаций, удовлетворяющих условиям (2.3) и (2.4). К примеру, если  $n$  и  $m$  равняются 10, то число допустимых вариантов составит 10 миллиардов, перебор и расчет которых может занять продолжительное время. На практике же требуется решать задачи большей размерности. В этой связи

целесообразно использовать алгоритмы, позволяющие быстро найти близкое к оптимуму решение. Один из таких алгоритмов предложен и подробно описан в [1].

Дальнейшие исследования позволили привести (2) к задаче целочисленного линейного программирования путем введения булевых неизвестных  $y_i$ , принимающие следующие значения:

1 - если  $i$ -ый исполнитель задействован, т.е. партнер назначается на одну или более работ.

0 - если  $i$ -ый исполнитель не задействован, т.е. партнер не участвует в выполнении работ проекта.

Целевая функция при этом принимает линейный вид:

$$L = L(y) = \sum_{i=1}^n y_i \rightarrow \min \quad (4)$$

Далее, требуется установить корректную связь  $y_i$  и  $x_{i,j}$ . Из самой постановки задачи следует, что если  $y_i = 0$ , то

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} = 0. \quad (5)$$

Когда же  $y_i = 1$ , тогда

$$m \geq \sum_{j=1}^m x_{i,j} \geq 1. \quad (6)$$

Следовательно, связь  $x_{i,j}$  и  $y_i$  можно выразить условием следующего вида:

$$m \cdot y_i \geq \sum_{j=1}^m x_{i,j} \geq y_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (7)$$

Покажем корректность условия (7) при любом целом значении  $m \geq 1$ :

1. Корректные значения  $y_i$  и  $x_{i,j}$ :

- если  $y_i = 0$  и  $\sum_{j=1}^m x_{i,j} = 0$ , то условие  $0 \geq 0 \geq 0$  истинно;
- если  $y_i = 1$  и  $\sum_{j=1}^m x_{i,j} = 1$ , то условие  $m \geq 1 \geq 1$  истинно;
- если  $y_i = 1$  и  $\sum_{j=1}^m x_{i,j} = r$ , то условие  $m \geq r \geq 1$  истинно при любом  $r$  в

интервале  $[1, m]$ ;

2. Противоречивые значения  $y_i$  и  $x_{i,j}$ :

- если  $y_i = 0$  и  $\sum_{j=1}^m x_{i,j} = 1$ , то условие  $0 \geq 1 \geq 0$  ложно;
- если  $y_i = 1$  и  $\sum_{j=1}^m x_{i,j} = 0$ , то условие  $m \geq 0 \geq 1$  ложно;
- если  $y_i = 0$  и  $\sum_{j=1}^m x_{i,j} = r$ , то условие  $0 \geq r \geq 1$  ложно при любом  $r$ ;

В итоге получаем модель линейного целочисленного программирования (7).

$$\begin{aligned}
 L(y) &= \sum_{i=1}^n y_i \rightarrow \min \\
 &\left\{ \begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{i,j} x_{i,j} \leq S \\
 &\sum_{i=1}^n x_{i,j} = 1, \quad j = \overline{1, m} \\
 &m \cdot y_i \geq \sum_{j=1}^m x_{i,j}, \quad i = \overline{1, n} \\
 &\sum_{j=1}^m x_{i,j} \geq y_i, \quad i = \overline{1, n} \\
 &y_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n} \\
 &x_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}
 \end{aligned} \right. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Задача оптимизации количества участников проекта в постановке (7) решается с помощью симплекс-метода и метода отсечений, которые реализованы в широком спектре программных средств, включая LPSolve, MS Excel с надстройкой Solver («Поиск решения»), CPLEX Optimizer и др.

В предложенную модель в случае необходимости могут быть добавлены другие ресурсные ограничения и условия:

- ограничения на возможное количество ресурсов, которое может выделить партнер для выполнения всего проекта и отдельных работ [3];
- ограничения по срокам начала и окончания отдельных работ и всего проекта в целом, учитывая топологию сетевой модели проекта [2, 4].
- «запреты» на выполнение отдельных работ конкретными партнерами, путем присвоения соответствующим  $c_{i,j}$  значений больших  $S$  [2, 5].

Наряду с названными ограничениями в линейной постановке задачи могут быть учтены и другие условия, выдвигаемые заказчиком, менеджером проекта и самими партнерами.

#### **Использованные источники:**

1. Катаев А.В., Катаева Т.М. Задача минимизации количества исполнителей работ в проекте: математическая модель и алгоритм решения // Экономика и социум. 2016. №6 (25).

2. Катаев А.В. Катаева Т.М. Оптимизация длительности выполнения проекта за счет выбора исполнителей работ: математические модели и методические приемы // Вестник Таганрогского института управления и экономики. 2015. - №2 (22) – С.100-103.

3. Катаев А.В. Модели распределения независимых заказов в рамках партнерской сети виртуального предприятия // Известия ТРТУ. 2007. №2 (74). – С. 109-114.

4. Катаев А.В. Информационные системы и модели оптимизации распределения заказов в партнерской сети виртуального предприятия // Прикладная информатика. 2007. – №5 (11). – С. 11-22.

5. Алесинская Т.В., Сербин В.Д., Катаев А.В. Экономико-математические методы и модели. Линейное программирование: учеб.-метод. пособие. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001. – 56 с.