Давлатов Ш.О.

Каршинский инженерно-экономический институт

Узбекистан, г.Карши

Ачилов И.А.

Каршинский инженерно-экономический институт

Узбекистан, г.Карши

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ СЕТКА НА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация. В этой статье приведен алгоритм численного решения уравнения теплопроводности методом сетка на прямоугольной области и на основе этого алгоритма создана программа на языке Delphi-7.

Ключевые слова. Алгоритм,метод сетка,схема,программа,
Delphi-7*,система.*

Davlatov Sh.O.

Karshi Engineering and Economic Institute

Uzbekistan, Karshi

Achilov I.A.

Karshi Engineering and Economic Institute

Uzbekistan, Karshi

Abstract. In this article presents an algorithm for the numerical solution heat equations using the mesh method on a rectangular area and a program in the Delphi-7 language is created based on this algorithm.

Keywords. Algorithm, grid method, scheme, program, Delphi-7,sistem.

1. Подстановка задачи.

В области $Q=(0,T)\times\Omega$ найти $u(x,y,t)$ решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t),\quad z=(x,y)\in\Omega \tag{1}$$

удовлетворяющий условии

$$u(z,0)=\varphi(z),\ z\in\overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$u(z,t)=\psi(z,t),\ z\in\partial\Omega, 0\le t\le T\,. \tag{3}$$

Здесь $\Omega=\{z=(x,y): a<x<b,\ c<y<d\}$, $\partial\Omega$ - граница области Ω, $A=const>0$, $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$, $f(z,t),\varphi(z),\psi(z,t)$-заданные непрерывные функции.

Будем считать, что задача (1)-(3) подставлено корректно[2].

2. Алгоритм решения.

Вводными данными являются следующее:

1. Постоянные: A,T,a,b,c,d;
2. Функции $f(x,y,t),\varphi(x,y),\psi(x,y,t)$.
3. N_t,N_x,N_y числа разбиений соответственно по t,x,y.

В программу функции $f(x,y,t),\varphi(x,y),\psi(x,y,t)$ вводится с использованием элементарных функций, арифметических операций : + сложение,- вычитание, / деление, * умножение, а также действительных чисел. Число π≈3,14 вводится символом pi. В следующем таблице даны элементарные функции и ввод их в программу.

№	Элементарные функции	Ввод элементарных функций в программу
1	y=|x|	mod (x)
2	y=[x]	butun (x)

3	y={x}	kasr (x)
4	$y=x^n$ nЄN	dar (x:n)
5	$y=\sqrt[n]{x}$ nЄN	ildiz (x:n)
6	y= sin x	sin (x)
7	y= cos x	cos (x)
8	y=tg x	tg (x)
9	y=ctg x	ctg (x)
10	y= sec x	sec (x)
11	y=cosec x	cosec (x)
12	y= arcsin x	arcsin (x)
13	y= arccos x	arccos (x)
14	y= arctg x	arctg (x)
15	y= arcctg x	arcctg (x)
16	$y= a^x$	kurs (a:x)
17	y= ln x	ln (x)
18	y= lg x	lg (x)
19	y= log x	log (x)
20	y= sh x	sh (x)
21	y= th x	th (x)
22	y= sch x	sch (x)
23	y= ch x	ch (x)
24	y= cth x	cth (x)
25	y= csch x	csch (x)
26	y= arsh x	arsh (x)
27	y= arch x	arch (x)
28	y= arth x	arth (x)
29	y= arcth x	arcth (x)
30	y= arcsec x	arcsec (x)

31	y= arccsc x	arccsc (x)
32	y= e^x	e (x)

Например функция $f(x,y,t)=\sqrt[3]{x^2+y^2}+e^{5t^3}$ вводится в программу в следующем виде ildiz(dar(X:2)+dar(Y:2):3)+e (5*dar(T:3)).

Задачу (1)-(3) решим методом сетка. Разобьём отрезок $[0;T]$ на N_t равные части точками

$$t_n = n\tau;\ n=\overline{0,N_t};\ \tau=\frac{T}{N_t}.$$

Аналогично разобьём отрезок $[a;b]$ на N_x равные части точками

$$x_i = a+ih_x;\ i=\overline{0,N_x};\ h_x=\frac{b-a}{N_x}$$

и разобьём отрезок $[c;d]$ на N_y равные части точками

$$y_j = c+jh_y;\ j=\overline{0,N_y};\ h_y=\frac{d-c}{N_y}.$$

$z_{ij}^n=(x_i,y_j,t_n)$ - называется узлом сетки. Приближенное значение решения $u(x,y,t)$ в узле z_{ij}^n обозначим символом u_{ij}^n, т.е.

$$u(x_i,y_j,t_n)\approx u_{ij}^n .$$

Частные производные аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,y_j,t_{n+1})=\frac{u_{ij}^{n+1}-u_{ij}^n}{\tau}+O(\tau);\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_j,t_{n+1})=\frac{u_{i-1j}^{n+1}-2u_{ij}^{n+1}+u_{i+1j}^{n+1}}{h_x^2}+O(h_x^2);\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_j,t_{n+1})=\frac{u_{ij-1}^{n+1}-2u_{ij}^{n+1}+u_{ij+1}^{n+1}}{h_y^2}+O(h_y^2).
\end{aligned} \tag{4}$$

Используя (4) составим следующую неявную разностную схему для (3)

$$\frac{u_{ij}^{n+1}-u_{ij}^{n}}{\tau}=A^2\left(\frac{u_{i-1j}^{n+1}-2u_{ij}^{n+1}+u_{i+1j}^{n+1}}{h_x^2}+\frac{u_{ij-1}^{n+1}-2u_{ij}^{n+1}+u_{ij+1}^{n+1}}{h_y^2}\right)+f(x_i,y_j,t_{n+1}),$$
$$n=\overline{0,N_t-1},\ i=\overline{1,N_x-1},\ j=\overline{1,N_y-1}. \qquad (5)$$

Порядок аппроксимации $O(\tau+h_x^2+h_y^2)$. (5) запищим следующим виде:

$$-\frac{A^2\tau}{h_x^2}u_{i-1j}^{n+1}-\frac{A^2\tau}{h_y^2}u_{ij-1}^{n+1}+\left[1+2A^2\tau\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right)\right]u_{ij}^{n+1}-$$
$$-\frac{A^2\tau}{h_x^2}u_{i+1j}^{n+1}-\frac{A^2\tau}{h_y^2}u_{ij+1}^{n+1}=\tau f(x_i,y_j,t_{n+1})+u_{ij}^{n}, \qquad (6)$$
$$n=\overline{0,N_t-1},\ i=\overline{1,N_x-1},\ j=\overline{1,N_y-1}.$$

Начальное и граничное условие аппроксимируем следующим образом:

$$u_{ij}^{0}=\varphi(x_i,y_j),\quad z_{ij}=(x_i,y_j)\in\overline{\Omega_h},$$
$$u_{ij}^{n+1}=\varphi(x_i,y_j,t_{n+1}),\quad z_{ij}=(x_i,y_j)\in\partial\Omega_h, \qquad (7)$$
$$0<t_{n+1}<\tau N_t,\quad n=\overline{0,N_t-1}.$$

Здесь $\Omega_h=\left\{z_{ij}=(x_i,y_j): a<x_i<b,\ c<y_j<d\right\}$.

Задача (6)-(7) устойчива (см.[1],стр.181, теорема 2).Полученная система линейных уравнений (6) относительно u_{ij}^{n} замкнута вместе (7).

Для системы линейных уравнений (6) выполняется диагональное преобладание[3]. Следовательно систему линейных уравнений (6) можно решить например методом Зейделя[3].

На основе этого алгоритма создана программа на языке Delphi-7, решающая численно задачу (1)-(3) и рисующая график решения. Созданная программа проверена на основе вычислительных экспериментах.

3. Численные расчеты.

Задача. В области $Q=\left\{0<x<5,\ 0<y<5,\ 0<t<5\right\}$ найти $u(x,y,t)$ решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3 \tag{8}$$

удовлетворяющее начальное условие

$$u(x, y, 0) = x^2 + y^2 \tag{9}$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} &u(0, y, t) = y^2 + t,\ 0 \le y \le 5,\ 0 \le t \le 5; \\ &u(5, y, t) = y^2 + t + 25,\ 0 \le y \le 5,\ 0 \le t \le 5; \\ &u(x, 0, t) = x^2 + t,\ 0 \le x \le 5,\ 0 \le t \le 5; \\ &u(x, 5, t) = x^2 + t + 25,\ 0 \le x \le 5,\ 0 \le t \le 5. \end{aligned} \tag{10}$$

Точное решение задачи (8)-(10) $u(x, y, t) = x^2 + y^2 + t$

Решение.

Ниже приведены численные значения приближенного решения задачи (8)-(10) в узлах и график ее при разбиении $N_x = 10, N_y = 10, N_t = 20$ и при $T = 5$.

u[0,0]=5,00	u[1,0]=5,25	u[2,0]=6,00	u[3,0]=7,25	u[4,0]=9,00
u[5,0]=11,25	u[6,0]=14,00	u[7,0]=17,25	u[8,0]=21,00	u[9,0]=25,25
u[10,0]=30,00	u[0,1]=5,25	u[1,1]=5,50	u[2,1]=6,25	u[3,1]=7,50
u[4,1]=9,25	u[5,1]=11,50	u[6,1]=14,25	u[7,1]=17,50	u[8,1]=21,25
u[9,1]=25,50	u[10,1]=30,25	u[0,2]=6,00	u[1,2]=6,25	u[2,2]=7,00
u[3,2]=8,25	u[4,2]=10,00	u[5,2]=12,25	u[6,2]=15,00	u[7,2]=18,25
u[8,2]=22,00	u[9,2]=26,25	u[10,2]=31,00	u[0,3]=7,25	u[1,3]=7,50
u[2,3]=8,25	u[3,3]=9,50	u[4,3]=11,25	u[5,3]=13,50	u[6,3]=16,25
u[7,3]=19,50	u[8,3]=23,25	u[9,3]=27,50	u[10,3]=32,25	u[0,4]=9,00
u[1,4]=9,25	u[2,4]=10,00	u[3,4]=11,25	u[4,4]=13,00	u[5,4]=15,25
u[6,4]=18,00	u[7,4]=21,25	u[8,4]=25,00	u[9,4]=29,25	u[10,4]=34,00
u[0,5]=11,25	u[1,5]=11,50	u[2,5]=12,25	u[3,5]=13,50	u[4,5]=15,25
u[5,5]=17,50	u[6,5]=20,25	u[7,5]=23,50	u[8,5]=27,25	u[9,5]=31,50
u[10,5]=36,25	u[0,6]=14,00	u[1,6]=14,25	u[2,6]=15,00	u[3,6]=16,25
u[4,6]=18,00	u[5,6]=20,25	u[6,6]=23,00	u[7,6]=26,25	u[8,6]=30,00
u[9,6]=34,25	u[10,6]=39,00	u[0,7]=17,25	u[1,7]=17,50	u[2,7]=18,25
u[3,7]=19,50	u[4,7]=21,25	u[5,7]=23,50	u[6,7]=26,25	u[7,7]=29,50
u[8,7]=33,25	u[9,7]=37,50	u[10,7]=42,25	u[0,8]=21,00	u[1,8]=21,25
u[2,8]=22,00	u[3,8]=23,25	u[4,8]=25,00	u[5,8]=27,25	u[6,8]=30,00
u[7,8]=33,25	u[8,8]=37,00	u[9,8]=41,25	u[10,8]=46,00	u[0,9]=25,25
u[1,9]=25,50	u[2,9]=26,25	u[3,9]=27,50	u[4,9]=29,25	u[5,9]=31,50
u[6,9]=34,25	u[7,9]=37,50	u[8,9]=41,25	u[9,9]=45,50	u[10,9]=50,25

u[0,10]=30,00 u[1,10]=30,25 u[2,10]=31,00 u[3,10]=32,25 u[4,10]=34,00
u[5,10]=36,25 u[6,10]=39,00 u[7,10]=42,25 u[8,10]=46,00 u[9,10]=50,25
u[10,10]=55,00

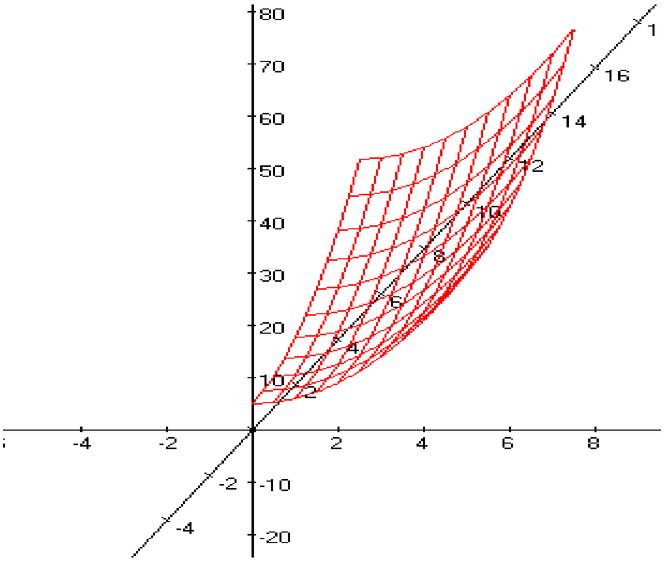

График решения $u(x, y, t)$.

Использованные источники:

1. М.Исроилов. Ҳисоблаш методлари. 2-қисм, “Иқтисодиёт-Молия” нашриёти, 2008 й. ISBN 978-9943-13-089-0

2.А.Тихонов, А.Самарский. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1972.

3. М.Исроилов. Ҳисоблаш методлари. 1-қисм, Тошкент,Ўқитувчи, 1988.