УДК 517.3

Керимова Д., Атаджанова М., Муратов М.

Kerimowa D., Atajanowa M., Muratow M.

Студентки 1 курса магистратуры

направление «Математика»

ФГБОУ ВО «Калмыцкий государственный университет

им. Б.Б.Городовикова

НЕКОТОРЫЕ АНАЛОГИИ В АНАЛИЗЕ.

Some analogies in analysis.

Аннотация: *Одним из самых распространенных методов научного исследования является аналогия. Аналогия - это передача знаний на более высокий уровень, основанная на создании общих характеристик или взаимосвязей этих вещей. Использование аналогии связано с трансформацией идей, с умственными переживаниями, то есть с независимым расширением и углублением существующих знаний.*

Цель работы состоит в выявлении аналогии в несобственных интегралов и числовых рядов.

Abstract: *One of the most common methods of scientific research is analogy. Analogy is the transfer of knowledge to a higher level, based on the creation of common characteristics or interrelationships of these things. The use of analogy is associated with the transformation of ideas, with mental experiences, that is, with the independent expansion and deepening of existing knowledge.*

The purpose of this work is to identify analogies in improper integrals and number series.

Ключевые слова*: аналогия, интеграл, функция, предел, число, функционал, множество, пространства.*

Keywords: *analogy, integral, function, limit, the number, functionality and plenty of space.*

Несобственные интегралы

Определение интеграла Римана.

Разбиением τ отрезка $[a, b]$ называется любая конечная система его точек $x_i, i = 1, 2, \dots, i_\tau$, такая, что $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i_{\tau-1}} < x_{i_\tau} = b$.

При этом пишут $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$. Каждый из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ называется отрезком разбиения τ, его длину обозначают через $\Delta x_i, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, i_\tau$.

Величину $|\tau| = \max \Delta x_i$ назовем мелкостью разбиения τ (или продолжением разбиение τ) того же отрезка, а также вписанным в разбиение τ , если каждая точка разбиения τ является и точкой разбиения τ' , иначе говоря, если каждый отрезок разбиения τ' содержится в некотором отрезке разбиения τ (говорят еще, что τ' - измельчение разбиения τ). В этом случае пишут $\tau' \succ \tau$ или, что то же, $\tau \succ \tau'$.

Пусть теперь на отрезке $[a, b]$ определена функция f и пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$- некоторое разбиение этого отрезка, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, i_\tau$. А $|\tau|$ – мелкость этого разбиения.

Зафиксируем произвольным образом точки $\xi_i \in \lfloor x_{i-1}, x_i \rfloor, i = 1, 2, \dots, i_\tau$ и составим сумму:

$$\sigma_\tau(f, \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau}) = \sum_{i=1}^{i=i_\tau} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Суммы вида $\sigma_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_{i_\tau})$ называются интегральными суммами Римана функции f.

Определение. Функция f называется **интегрируемой по Риману** на отрезке $[a, b]$, если существует такое число А, что для любой последовательности разбиений отрезка $[a, b]$ $\tau_n = \left\{x_i^{(n)}\right\}_{i=0}^{i=i_\tau}, n = 1,2, \dots, y$ которой $\lim_{n\to\infty} |\tau| = 0$, и для любого выбора точек $\xi_i^{(n)} \epsilon \left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right], i = 1,2, \dots, i_{\tau_n}, n = 1,2, \dots$

существует предел последовательности интегральных сумм $\sigma_{\tau_n}(\mathrm{f};\ \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{i_{\tau_n}}^{(n)})$ и он равен А:

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i_{\tau_n}} \mathrm{f}\left(\xi_1^{(n)}\right) \Delta x_i^{(n)} = A,$ где

$\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}; i = 1,2, \dots, i_{\tau_n}; n = 1,2, \dots .$

При этих обстоятельствах число А называется конкретным интегралом Римана функции f на промежутке [a, b] и обозначается как

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx.$$

Таким образом,

$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n}\left(\mathrm{f};\ \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{i_{\tau_n}}^{(n)}\right)$, где последовательность τ_n такова, что $\lim_{n\to\infty}|\tau_n| = 0$.

Функция, которая не ограничена на отрезке, не является интегрируемой по Риману, если функция определена на бесконечном интервале, то мы не можем говорить о ее интегрируемости по Риману просто потому, что определение интеграла применимо только к функциям, определенным на отрезке. Понятие интеграла обобщается на случай функций, определенных на неограниченных интервалах, а также неограниченные функции. Это сделано с переходом к пределу, дополнительному к пределу, по которому вводится интеграл Римана.

Определение: Пусть функция f определена на конечном или бесконечно полуинтервале $[a, b)$, -∞< $a < b$ ≤+∞ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,\ \eta]$, $a \leq \eta < b$. Если существует конечный предел $\lim_{\eta\to b} \int_a^b \mathrm{f}(x)dx$, то этот предел называется несобственным пределом и обозначается $\int_a^b \mathrm{f}(x)dx$.

Таким образом: $\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\eta\to b} \int_a^\eta f(x)dx$ (1)

Если предел в (1) существует (и, следовательно, конечен), то говорят также что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, в противном случае - что он расходится. В отличие от несобственного интеграла обычный интеграл Римана называют иногда собственным интегралом.

Теорема: критерий Коши сходимости несобственных интегралов.

Для сходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\xi > 0$ существовало такое число $\eta, a \leq \eta < b$, что если

$$\eta < \eta' < b, \eta < \eta'' < b, \text{ то}$$

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \xi.$$

Числовые ряды

Определение: Выражение (символ) вида $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, обозначаемое в виде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, называется рядом.

Определение: Пусть дана последовательность чисел $u_n, n = 1,2, \ldots$.

Составим новую последовательность чисел $s_n, n = 1,2, \ldots$ следующим образом:

$s_1 = u_1;$

$s_2 = u_1 + u_2;$

$s_3 = u_1 + u_2 + u_3;$

.. ..

$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$

.. ..

Пара последовательностей $\{u_n\}$ и $\{s_n\}$ называется числовым рядом (подробнее: числовым рядом с общим членом u_n) и обозначается через

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \qquad (1)$$

Элементы исходной последовательности $\{u_n\}$ называются членами ряда (1), а элементы последовательности $\{S_n\}$ – частичными суммами этого ряда, при этом u_n называется n- м членом ряда, а конечная сумма s_n – n-й частичной. Если последовательность частичных сумм ряда $\{s_n\}$ сходится, то он называется сходящимся рядом, а если она расходится, то расходящимся.

Определение:

Ряд, членами которого являются члены ряда (1), начиная с $(n+1)$ – го взятые в том же порядке, что и в исходном ряде, называется -м остатком ряда (1) и обозначается через $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ или $u_{n+1}u_{n+2} + \cdots$

Определение:

Если ряд (1) сходится, то предел $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ называется его суммой. В этом случае пишут $s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ или

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (2)$$

Каждая ряд представляет собой пару из двух последовательностей, первая может быть взята произвольно (последовательность членов цепочки), а вторая составлена определенным образом из членов первой (последовательность частичных сумм членов ряда). Однако ряд однозначно определяется каждой из этих последовательностей. Действительно, если дана последовательность слагаемых u_n ряда, то члены последовательности ее частичных сумм находятся, согласно определению 1, по формулам $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, n = 1, 2, \ldots$. Если же задана последовательность ряда $\{s_n\}$ частичных сумм ряда, то члены $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$определяются по формулам $u_1 = s_1, u_n = s_n - s_{n-1}, n = 2,3, \ldots$. Отсюда следует, что для всякой последовательности всегда можно найти такой ряд, что будет последовательностью его частичных сумм.

Если n – й остаток ряда (1) сходится, то его сумму будем обозначать через r_n:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \qquad (3)$$

и называть для кратности просто остатком ряда.

Теорема 1 (Необходимое условие сходимости ряда)

Если ряд (1) сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. (4).

Используя эту теорию, иногда можно определить расходимость рассматриваемого ряда: если условие (4) не удовлетворяется конкретным рядом, то он расходится.

Критерий Коши сходимости ряда

Для того, чтобы последовательность действительных чисел $\{s_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_ε , что для любых номеров $n > n_\varepsilon$ и любых целых $p \geq 0$ выполнялось неравенство $|s_{n+p} - s_{n-1}| < \varepsilon$.

Для удобства использования этого критерия в случае рядов (так как этот критерий можно легко перефразировать применительно к рядам) в данном случае рядов записываются разность $s_{n+p} - s_{n-1}$ вместо разности $s_{n+p} - s_n$. При этом, поскольку сумма s_0 не определена, будем считать, по определению, что $s_0 = 0$.

Теорема 2 (критерий Коши)

Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_ε , что при любом $n > n_\varepsilon$ и любом целом $p \geq 0$ выполнялось неравенство

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon \ . \qquad (5)$$

Из критерия Коши сходимости ряда легко можно получить снова необходимое условие (4) сходимости ряда. Действительно, в этом случае неравенство (5) выполняется для любого $p \geq 0$ и, в частности, для $p = 0$. Поэтому для всех $n > n_\varepsilon$ имеем $|u_n| < \varepsilon$, а это в силу произвольности $\varepsilon > 0$, и означает, что $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Литература

1. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, т.1, 2. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, т.1, 2. – любое издание.
3. Зорич В.А. Математический анализ ,ч.1. – М.: Наука, 1981; Ч.2. – М.: Наука 1984.
4. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т.1, 2. - М.: Высшая школа, 1989.
5. А.П. Юшкевич. История математики. Т.3. - 1972, 496с.
6. Рыбников К.А. История математики. т.2 - 1963, 336с.