

*Давлатов Ш.О.
Каршинский инженерно-экономический институт
Узбекистан, г.Карши*

*Ачилов И.А.
Каршинский инженерно-экономический институт
Узбекистан, г.Карши*

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ 1-ГО ПОРЯДКА**

Аннотация. В этой статье приведен алгоритм численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка методом Рунге-Кутты и на основе этого алгоритма создана программа на языке Delphi-7.

Ключевые слова. Алгоритм, Рунге-Кутта, схема, программа, Коши, система.

*Davlatov Sh.O.
Karshi Engineering and Economic Institute
Uzbekistan, Karshi*

*Achilov I.A.
Karshi Engineering and Economic Institute
Uzbekistan, Karshi*

Abstract. In this article presents an algorithm for the numerical solution system of 1st order ordinary differential equations using the Runge-Kutta method and a program in the Delphi-7 language is created based on this algorithm.

Keywords. Algorithm, Runge-Kutta, scheme, program, Cauchy, sistem.

1. Подстановка задачи.

Найти решение системы

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f(x, y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2) \end{cases} \quad (1)$$

удовлетворяющий начальные условия

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}. \quad (2)$$

Будем считать, что задача Коши (1)-(2) подставлено корректно, т.е. удовлетворяет все условия следующей теоремы.

Теорема. (Теорема Коши). *Если в некоторой области 3 – мерного пространства функции $f_1(x, y_1, y_2)$, $f_2(x, y_1, y_2)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по y_1, y_2 , то для любой точки (x_0, y_{10}, y_{20}) этой области существует единственное решение*

$$y_1 = \phi_1(x), \quad y_2 = \phi_2(x)$$

системы дифференциальных уравнений вида (1), определенное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям x_0, y_{10}, y_{20} .

2. Алгоритм решения.

Вводными данными являются следующее:

1. Начальные условия: x_0, y_{10}, y_{20} ;
2. Отрезок, $[x_0; X]$ в котором находится решение задачи Коши (1)-(2).
3. Функции $f_1(x, y_1, y_2), f_2(x, y_1, y_2)$.
4. N число разбиений отрезка $[x_0; X]$.

В программу функции $f_1(x, y_1, y_2), f_2(x, y_1, y_2)$ вводятся с использованием элементарных функций, арифметических операций : + сложение, - вычитание, / деление, * умножение, а также действительных чисел. Число $\pi \approx 3,14$ вводится символом pi. В следующем таблице даны элементарные функции и ввод их в программу.

№	Элементарные функции	Ввод элементарных функций в программу
1	$y= x $	mod (x)
2	$y=[x]$	butun (x)
3	$y=\{x\}$	kasr (x)
4	$y=x^n$ $n \in \mathbb{N}$	dar (x:n)
5	$y=\sqrt[n]{x}$ $n \in \mathbb{N}$	ildiz (x:n)
6	$y= \sin x$	sin (x)
7	$y= \cos x$	cos (x)
8	$y= \operatorname{tg} x$	tg (x)
9	$y= \operatorname{ctg} x$	ctg (x)
10	$y= \sec x$	sec (x)
11	$y= \operatorname{cosec} x$	cosec (x)
12	$y= \arcsin x$	arcsin (x)
13	$y= \arccos x$	arccos (x)
14	$y= \operatorname{arctg} x$	arctg (x)
15	$y= \operatorname{arcctg} x$	arcctg (x)
16	$y= a^x$	kurs (a:x)
17	$y= \ln x$	ln (x)
18	$y= \lg x$	lg (x)
19	$y= \log x$	log (x)
20	$y= \operatorname{sh} x$	sh (x)
21	$y= \operatorname{th} x$	th (x)
22	$y= \operatorname{sch} x$	sch (x)

23	$y = \operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch}(x)$
24	$y = \operatorname{cth} x$	$\operatorname{cth}(x)$
25	$y = \operatorname{csch} x$	$\operatorname{csch}(x)$
26	$y = \operatorname{arsh} x$	$\operatorname{arsh}(x)$
27	$y = \operatorname{arch} x$	$\operatorname{arch}(x)$
28	$y = \operatorname{arth} x$	$\operatorname{arth}(x)$
29	$y = \operatorname{arcth} x$	$\operatorname{arcth}(x)$
30	$y = \operatorname{arcsec} x$	$\operatorname{arcsec}(x)$
31	$y = \operatorname{arccsc} x$	$\operatorname{arccsc}(x)$
32	$y = e^x$	$e(x)$

Например функция $f(x, y_1, y_2) = \sqrt[3]{x^2 + y_1^2} + e^{5y_2^2}$ вводится в программу в следующем виде `ildiz(dar(X:2)+dar(Y1:2):3)+e(5*dar(Y2:2))`.

Задачу Коши (1)-(2) решим методом Рунге-Кутты четвёртого порядка.

Разобьём отрезок $[x_0; X]$ на N равные части точками

$$x_i = x_0 + ih; i = \overline{0, N}; h = \frac{X - x_0}{N}$$

которые называются узлами сетки. Приближенное значение решения $y_1(x)$ в узле i обозначим символом y_{1i} , т.е.

$$y_1(x_i) \approx y_{1i}; i = \overline{0, N}.$$

Аналогично приближенное значение решения $y_2(x)$ в узле i обозначим символом y_{2i} , т.е.

$$y_2(x_i) \approx y_{2i}; i = \overline{0, N}.$$

В этом методе используется следующая схема

$$\left. \begin{aligned} y_{1i+1} &= y_{1i} + \frac{1}{6}(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}), \\ y_{2i+1} &= y_{2i} + \frac{1}{6}(l_{1i} + 2l_{2i} + 2l_{3i} + l_{4i}), \\ i &= \overline{0, N-1} \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_{1i} &= hf_1(x_i, y_{1i}, y_{2i}), \quad l_{1i} = hf_2(x_i, y_{1i}, y_{2i}), \\ k_{2i} &= hf_1(x_i + \frac{1}{2}h, y_{1i} + \frac{1}{2}k_{1i}, y_{2i} + \frac{1}{2}l_{1i}), \\ l_{2i} &= hf_2(x_i + \frac{1}{2}h, y_{1i} + \frac{1}{2}k_{1i}, y_{2i} + \frac{1}{2}l_{1i}), \\ k_{3i} &= hf_1(x_i + \frac{1}{2}h, y_{1i} + \frac{1}{2}k_{2i}, y_{2i} + \frac{1}{2}l_{2i}), \\ l_{3i} &= hf_2(x_i + \frac{1}{2}h, y_{1i} + \frac{1}{2}k_{2i}, y_{2i} + \frac{1}{2}l_{2i}), \\ k_{4i} &= hf_1(x_i + h, y_{1i} + k_{3i}, y_{2i} + l_{3i}), \\ l_{4i} &= hf_2(x_i + h, y_{1i} + k_{3i}, y_{2i} + l_{3i}). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

На основе этого алгоритма создана программа на языке Delphi-7, решающая численно задачу (1) и рисующая график решения. Созданная программа проверена на основе вычислительных экспериментах.

3. Численные расчеты.

Задача. Найти решения задачи Коши для уравнения колебания маятника в вязкой среде

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 0,1\frac{d\varphi}{dt} + 5\sin\varphi &= 0 \\ \varphi(0) &= 0,2 \\ \frac{d\varphi}{dt}(0) &= 0,1 \end{aligned} \right. \quad (4)$$

на промежутке времени $[0,2]$.

Решение. Сделав замену $\frac{d\varphi}{dt} = \psi$, уравнение (4) запишем в виде

системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \psi, \\ \frac{d\psi}{dt} = -(0,1\psi + 5 \sin \varphi), \\ \varphi(0) = 0,2; \psi(0) = 0,1 \end{cases} \quad (5)$$

Ниже приведены численные значения приближенного решения системы (5) в узлах и график ее при $N = 20$.

$\varphi [0,0]= 0,2000$ $\varphi [0,1]=0,2049$ $\varphi [0,2]=0,1997$ $\varphi [0,3]=0,1848$ $\varphi [0,4]=0,1608$
 $\varphi [0,5]=0,1292$ $\varphi [0,6]=0,0915$ $\varphi [0,7]=0,0497$ $\varphi [0,8]=0,0058$ $\varphi [0,9]=-0,0379$
 $\varphi [1,0]=-0,0794$ $\varphi [1,1]=-0,1164$ $\varphi [1,2]=-0,1474$ $\varphi [1,3]=-0,1708$ $\varphi [1,4]=-0,1855$
 $\varphi [1,5]=-0,1909$ $\varphi [1,6]=-0,1869$ $\varphi [1,7]=-0,1737$ $\varphi [1,8]=-0,1521$ $\varphi [1,9]=-0,1232$
 $\varphi [2,0]=-0,0885$

$\psi [0,0]=0,1000$ $\psi [0,1]=-0,0015$ $\psi [0,2]=-0,1018$ $\psi [0,3]=-0,1962$ $\psi [0,4]=-0,2802$
 $\psi [0,5]=-0,3496$ $\psi [0,6]=-0,4011$ $\psi [0,7]=-0,4323$ $\psi [0,8]=-0,4418$ $\psi [0,9]=-0,4294$
 $\psi [1,0]=-0,3958$ $\psi [1,1]=-0,3430$ $\psi [1,2]=-0,2738$ $\psi [1,3]=-0,1919$ $\psi [1,4]=-0,1015$
 $\psi [1,5]=-0,0070$ $\psi [1,6]=0,0869$ $\psi [1,7]=0,1756$ $\psi [1,8]=0,2549$ $\psi [1,9]=0,3209$
 $\psi [2,0]=0,3704$

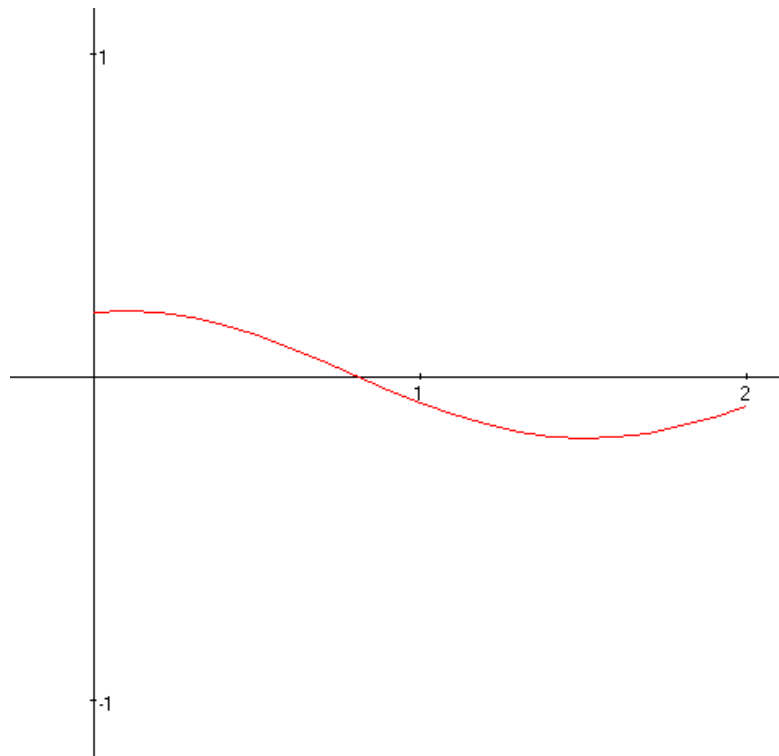


График функции φ .

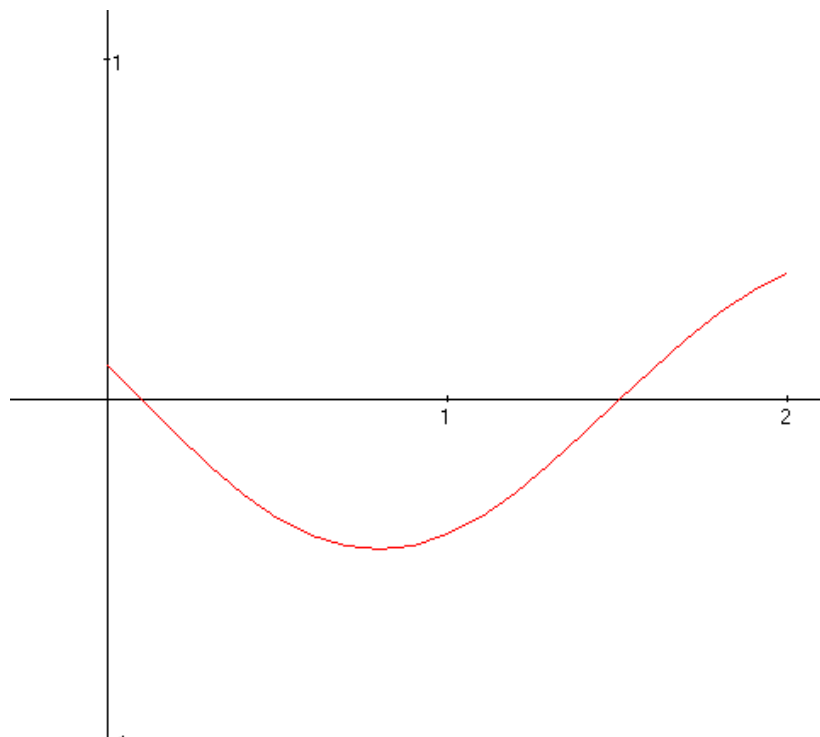


График функции ψ .

Использованные источники:

1. М.Исроилов. Ҳисоблаш методлари. 2-қисм, “Иқтисодиёт-Молия” нашриёти, 2008 й. ISBN 978-9943-13-089-0
2. К.Деккер, Я.Вервер. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. –М.: Наука, 1988.